Оглавление

[2.Показать, что функция где имеет минимум, равный при 1](#_Toc28276111)

[3.Показать, что функция при ограничениях достигает минимум при 2](#_Toc28276112)

[5.Найти условия Куна-Такера и таким образом минимизировать функцию при ограничениях 4](#_Toc28276113)

# 2.Показать, что функция где имеет минимум, равный при

Шаг №1. Определение стационарных точек.   
Найдем экстремум функции F(X) = x12+x22, используя функцию Лагранжа:   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=L(\overline%7bX%7d,%20\overline%7b\lambda%20%7d)%20=%20F(\overline%7bX%7d)%20%2B%20\sum%7b\lambda%20_%7bi%7d\phi%20_%7bi%7d%7d  
где F(X) - целевая функция вектора X   
φi(X) - ограничения в неявном виде (i=1..n)   
В качестве целевой функции, подлежащей оптимизации, в этой задаче выступает функция:   
F(X) = x12+x22   
Перепишем ограничение задачи в неявном виде:   
φ1(X) = x1-4 = 0   
φ2(X) = x2-4 = 0   
Составим вспомогательную функцию Лагранжа:   
L(X, λ) = x12+x22 + λ1\*(x1-4) + λ2\*(x2-4)   
Необходимым условием экстремума функции Лагранжа является равенство нулю ее частных производных по переменным хi и неопределенным множителям λ.   
Составим систему:   
∂L/∂x1 = 2\*x1+λ1 = 0   
∂L/∂x2 = 2\*x2+λ2 = 0   
∂L/∂λ1 = x1-4 = 0   
∂L/∂λ2 = x2-4 = 0   
Решив данную систему, получаем стационарные точки X0.   
X0=(4; 4), λ1 = -8, λ2 = -8   
Шаг №2. Определение типа экстремума в стационарных точках.   
Для определения типа экстремума необходимо вычислить **матрицу Гессе** для точки X0, либо найти значения функции в каждой из точек и выбрать экстремальное.   
L(x,λ, μ) = x12+x22-8\*(x1-4)-8\*(x2-4)   
f(x) = x1^2+x2^2-8\*(x1-4)-8\*(x2-4)   
**1. Найдем частные производные**.   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%20f(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%7d%20=%202\cdot%20x_%7b1%7d-8  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%20f(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b2%7d%7d%20=%202\cdot%20x_%7b2%7d-8  
**2. Решим систему уравнений**.   
2\*x1-8 = 0   
2\*x2-8 = 0   
Получим:   
Из первого уравнения выражаем x1:   
x1 = 4   
2\*x2-8 = 0   
Откуда x2 = 4   
Количество стационарных точек равно 1.   
M1(4;4)   
**3. Найдем частные производные второго порядка**.   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%20\partial%20x_%7b2%7d%7d%20=%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%5e%7b2%7d%7d%20=%202  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b2%7d%5e%7b2%7d%7d%20=%202  
**4. Вычислим значение этих частных производных второго порядка в стационарных точках M(x0;y0)**.   
Вычисляем значения для точки M1(4;4)   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=%7b\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%5e%7b2%7d%7d%7d_%7b(4;4)%7d%20=%202  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=%7b\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b2%7d%5e%7b2%7d%7d%7d_%7b(4;4)%7d%20=%202  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=%7b\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%20\partial%20x_%7b2%7d%7d%7d_%7b(4;4)%7d%20=%200  
Строим матрицу Гессе:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| H= | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  | | --- | --- | | 2 | 0 | | 0 | 2 | |  | |  |

D1 = a11 > 0, D2 = 4 > 0   
В точке M1(4;4) матрица Гессе положительно определена и функция является выпуклой. Точка x1=(4;4) является точкой минимума. 

# 3.Показать, что функция при ограничениях достигает минимум при

Определение стационарных точек.   
Найдем экстремум функции F(X) = x12+x22, используя функцию Лагранжа:   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=L(\overline%7bX%7d,%20\overline%7b\lambda%20%7d)%20=%20F(\overline%7bX%7d)%20%2B%20\sum%7b\lambda%20_%7bi%7d\phi%20_%7bi%7d%7d  
где F(X) - целевая функция вектора X   
φi(X) - ограничения в неявном виде (i=1..n)   
В качестве целевой функции, подлежащей оптимизации, в этой задаче выступает функция:   
F(X) = x12+x22   
Перепишем ограничение задачи в неявном виде:   
φ1(X) = x1-2.5 = 0   
φ2(X) = x2+2.5 = 0   
Составим вспомогательную функцию Лагранжа:   
L(X, λ) = x12+x22 + λ1\*(x1-2.5) + λ2\*(x2+2.5)   
Необходимым условием экстремума функции Лагранжа является равенство нулю ее частных производных по переменным хi и неопределенным множителям λ.   
Составим систему:   
∂L/∂x1 = 2\*x1+λ1 = 0   
∂L/∂x2 = 2\*x2+λ2 = 0   
∂L/∂λ1 = x1-2.5 = 0   
∂L/∂λ2 = x2+2.5 = 0   
Решив данную систему, получаем стационарные точки X0.   
X0=(2.5; -2.5), λ1 = -5, λ2 = 5   
Шаг №2. Определение типа экстремума в стационарных точках.   
Для определения типа экстремума необходимо вычислить **матрицу Гессе** для точки X0, либо найти значения функции в каждой из точек и выбрать экстремальное.   
L(x,λ, μ) = x12+x22-5\*(x1-2.5)+5\*(x2+2.5)   
f(x) = x1^2+x2^2-5\*(x1-2.5)+5\*(x2+2.5)   
**1. Найдем частные производные**.   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%20f(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%7d%20=%202\cdot%20x_%7b1%7d-5  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%20f(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b2%7d%7d%20=%202\cdot%20x_%7b2%7d%2B5  
**2. Решим систему уравнений**.   
2\*x1-5 = 0   
2\*x2+5 = 0   
Получим:   
Из первого уравнения выражаем x1:   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=x_%7b1%7d%20=%20\frac%7b5%7d%7b2%7d  
2\*x2+5 = 0   
Откуда x2 = -5/2   
Количество стационарных точек равно 1.   
M1(5/2;-5/2)   
**3. Найдем частные производные второго порядка**.   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%20\partial%20x_%7b2%7d%7d%20=%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%5e%7b2%7d%7d%20=%202  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b2%7d%5e%7b2%7d%7d%20=%202  
**4. Вычислим значение этих частных производных второго порядка в стационарных точках M(x0;y0)**.   
Вычисляем значения для точки M1(5/2;-5/2)   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=%7b\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%5e%7b2%7d%7d%7d_%7b(5/2;-5/2)%7d%20=%202  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=%7b\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b2%7d%5e%7b2%7d%7d%7d_%7b(5/2;-5/2)%7d%20=%202  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=%7b\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%20\partial%20x_%7b2%7d%7d%7d_%7b(5/2;-5/2)%7d%20=%200  
Строим матрицу Гессе:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| H= | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  | | --- | --- | | 2 | 0 | | 0 | 2 | |  | |  |

D1 = a11 > 0, D2 = 4 > 0   
В точке M1(5/2;-5/2) матрица Гессе положительно определена и функция является выпуклой. Точка x1=(5/2;-5/2) является точкой минимума.

# 5.Найти условия Куна-Такера и таким образом минимизировать функцию при ограничениях

Шаг №1. Определение стационарных точек.   
Найдем экстремум функции F(X) = x12+x22, используя функцию Лагранжа:   
  
где F(X) - целевая функция вектора X   
φi(X) - ограничения в неявном виде (i=1..n)   
В качестве целевой функции, подлежащей оптимизации, в этой задаче выступает функция:   
F(X) = x12+x22   
Перепишем ограничение задачи в неявном виде:   
φ1(X) = 5-(x1+x2) = 0   
Составим вспомогательную функцию Лагранжа:   
L(X, λ, μ) = x12+x22 + μ\*(5-(x1+x2))+μ2x1+μ3x2   
Необходимым условием экстремума функции Лагранжа является равенство нулю ее частных производных по переменным хi и неопределенному множителю   
Составим систему:   
∂L/∂x1 = 2\*x1-μ = 0   
∂L/∂x2 = 2\*x2-μ = 0   
μ(5-(x1+x2)) = 0, μ ≥ 0   
Решим следующую систему уравнений:   
2\*x1-μ = 0   
2\*x2-μ = 0   
  
Рассмотрим два варианта:   
a) μ ≠ 0   
X1=(2.5, 2.5), μ=5   
b) μ = 0   
X1=(0, 0),   
Шаг №2. Проверка условий Куна-Таккера.   
Теорема Куна-Таккера. Чтобы найденный план X0 был решением задачи необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор μ0 такой, что пара (X0, μ0) для всех X ≥ 0 и μ ≥ 0.   
L(X, μ0) ≤ L(X0, μ0) ≤ L(X0, μ)   
Чтобы функция двух векторных переменных имела седловую точку, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7bdL(X%5e%7b0%7d,\mu%5e%7b0%7d)%7d%7bdx_%7bj%7d%7d%20\ge%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=x_%7bj%7d%5e%7b0%7d\frac%7bdL(X%5e%7b0%7d,\mu%5e%7b0%7d)%7d%7bdx_%7bj%7d%7d%20=%200,%20x_%7bj%7d%5e%7b0%7d%20\ge%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7bdL(X%5e%7b0%7d,\mu%5e%7b0%7d)%7d%7bd\mu%20_%7bj%7d%7d%20\le%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=x_%7bj%7d%5e%7b0%7d\frac%7bdL(X%5e%7b0%7d,\mu%5e%7b0%7d)%7d%7bd\mu%20_%7bj%7d%7d%20=%200,%20\mu%20_%7bj%7d%5e%7b0%7d%20\ge%200  
X1=(2.5, 2.5), μ=5. Данная точка удовлетворяет всем условиям. Значение функции f(x)=12.5   
X1=(0, 0), . Данная точка удовлетворяет всем условиям. Значение функции f(x)=0   
Шаг №3. Определение вида экстремума.   
Для функции L(x,λ, μ) находят матрицу Гессе HL. Если матрица HL положительно определена - найденная точка x является точкой минимума, если матрица HL отрицательно определена - найденная точка x является точкой максимума.   
L(x,λ, μ) = x12+x22   
f(x) = x1^2+x2^2   
**1. Найдем частные производные**.   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%20f(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%7d%20=%202\cdot%20x_%7b1%7d  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%20f(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b2%7d%7d%20=%202\cdot%20x_%7b2%7d  
**2. Решим систему уравнений**.   
2\*x1 = 0   
2\*x2 = 0   
Получим:   
Из первого уравнения выражаем x1:   
x1 = 0   
2\*x2 = 0   
Откуда x2 = 0   
Количество стационарных точек равно 1.   
M1(0;0)   
**3. Найдем частные производные второго порядка**.   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%20\partial%20x_%7b2%7d%7d%20=%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%5e%7b2%7d%7d%20=%202  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b2%7d%5e%7b2%7d%7d%20=%202  
**4. Вычислим значение этих частных производных второго порядка в стационарных точках M(x0;y0)**.   
Вычисляем значения для точки M1(0;0)   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=%7b\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%5e%7b2%7d%7d%7d_%7b(0;0)%7d%20=%202  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=%7b\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b2%7d%5e%7b2%7d%7d%7d_%7b(0;0)%7d%20=%202  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=%7b\frac%7b%20\partial%5e%7b2%7df(x)%7d%7b%20\partial%20x_%7b1%7d%20\partial%20x_%7b2%7d%7d%7d_%7b(0;0)%7d%20=%200  
Строим матрицу Гессе:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| H= | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  | | --- | --- | | 2 | 0 | | 0 | 2 | |  | |  |

D1 = a11 > 0, D2 = 4 > 0   
В точке M1(0;0) матрица Гессе положительно определена и функция является выпуклой. Точка x1=(0;0) является точкой минимума.

# 6.Найти условия Куна-Такера и таким образом минимизировать функцию при ограничениях

Шаг №1. Определение стационарных точек.   
Найдем экстремум функции F(X) = x12+6\*x1\*x2-4\*x1-2\*x2, используя функцию Лагранжа:   
  
где F(X) - целевая функция вектора X   
φi(X) - ограничения в неявном виде (i=1..n)   
В качестве целевой функции, подлежащей оптимизации, в этой задаче выступает функция:   
F(X) = x12+6\*x1\*x2-4\*x1-2\*x2   
Перепишем ограничение задачи в неявном виде:   
φ1(X) = x12-2\*x2 = 0   
φ2(X) = 1-(1.2\*x1-2\*x2) = 0   
Составим вспомогательную функцию Лагранжа:   
L(X, λ, μ) = x12+6\*x1\*x2-4\*x1-2\*x2 - μ1\*(-(x12-2\*x2)) - μ2\*(1-(1.2\*x1-2\*x2))   
Необходимым условием экстремума функции Лагранжа является равенство нулю ее частных производных по переменным хi и неопределенным множителям   
Составим систему:   
∂L/∂x1 = 2\*x1\*μ1+2\*x1+6\*x2+1.2\*μ2-4 = 0   
∂L/∂x2 = 6\*x1-2\*μ1-2\*μ2-2 = 0   
μ1(x12-2\*x2) = 0, μ1 ≥ 0   
μ2(1-(1.2\*x1-2\*x2)) = 0, μ2 ≥ 0   
Решим следующие подзадачи:   
Подзадача №1   
Решим следующую систему уравнений:   
2\*x1\*μ1+2\*x1+6\*x2+1.2\*μ2-4 = 0   
6\*x1-2\*μ1-2\*μ2-2 = 0   
μ1(x12-2\*x2) = 0, μ1 ≥ 0   
Рассмотрим два варианта:   
a) μ1 ≠ 0   
Теперь необходимо подобрать такие μ, чтобы выполнялись все условия. Если подобрать такие значения невозможно, то решение не существует.   
b) μ1 = 0   
Выражаем x1 из последнего уравнения и подставляем в первое:   
x1=μ2/3+1/3   
x2=0.555555555555556-0.311111111111111\*μ2   
Теперь необходимо подобрать такие μ, чтобы выполнялись все условия. Если подобрать такие значения невозможно, то решение не существует.   
Подзадача №2   
Решим следующую систему уравнений:   
2\*x1\*μ1+2\*x1+6\*x2+1.2\*μ2-4 = 0   
6\*x1-2\*μ1-2\*μ2-2 = 0   
μ2(1-(1.2\*x1-2\*x2)) = 0, μ2 ≥ 0   
Рассмотрим два варианта:   
a) μ2 ≠ 0   
Выражаем x1 из последнего уравнения и подставляем в остальные:   
x1=1.66666666666667\*x2+0.833333333333333   
Выразим x2 из первого и второго уравнения:   
x1=-0.128571428571429\*μ2+0.25   
x2=0.2\*μ2-0.3   
Теперь необходимо подобрать такие μ, чтобы выполнялись все условия. Если подобрать такие значения невозможно, то решение не существует.   
b) μ2 = 0   
Выражаем x1 из последнего уравнения и подставляем в первое:   
x1=μ1/3+1/3   
x2=-μ1^2/9-2\*μ1/9+5/9   
Теперь необходимо подобрать такие μ, чтобы выполнялись все условия. Если подобрать такие значения невозможно, то решение не существует.   
Шаг №2. Проверка условий Куна-Таккера.   
*Теорема Куна-Таккера*. Чтобы найденный план X0 был решением задачи необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор μ0 такой, что пара (X0, μ0) для всех X ≥ 0 и μ ≥ 0.   
L(X, μ0) ≤ L(X0, μ0) ≤ L(X0, μ)   
Чтобы функция двух векторных переменных имела седловую точку, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:   
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7bdL(X%5e%7b0%7d,\mu%5e%7b0%7d)%7d%7bdx_%7bj%7d%7d%20\ge%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=x_%7bj%7d%5e%7b0%7d\frac%7bdL(X%5e%7b0%7d,\mu%5e%7b0%7d)%7d%7bdx_%7bj%7d%7d%20=%200,%20x_%7bj%7d%5e%7b0%7d%20\ge%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=\frac%7bdL(X%5e%7b0%7d,\mu%5e%7b0%7d)%7d%7bd\mu%20_%7bj%7d%7d%20\le%200  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=x_%7bj%7d%5e%7b0%7d\frac%7bdL(X%5e%7b0%7d,\mu%5e%7b0%7d)%7d%7bd\mu%20_%7bj%7d%7d%20=%200,%20\mu%20_%7bj%7d%5e%7b0%7d%20\ge%200  
Шаг №3. Определение вида экстремума.   
Для функции L(x,λ, μ) находят матрицу Гессе HL. Если матрица HLположительно определена - найденная точка x является точкой минимума, если матрица HL отрицательно определена - найденная точка x является точкой максимума.